अध्याय 5

सांतत्य और अवकलनीयता

5.1 समग्र अवलोकन (Overview)

5.1.1 *किसी बिंदु पर एक फलन का सांतत्य*

मान लीजिए कि वास्तविक संख्याओं के किसी उपसमुच्चय पर f कोई वास्तविक फलन है तथा यह भी मान लीजिए कि c फलन f के प्रांत में स्थित एक बिंदु है। तब f, बिंदु c पर संतत होता है, यदि

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

अधिक सुस्पष्ट रूप से, यदि $x = c$ पर फलन के वाम पक्ष की सीमा, दक्षिण सीमा तथा फलन के मान का अस्तित्व हो और ये परस्पर बराबर हों, अर्थात्

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

तो f को $x = c$ पर संतत कहा जाता है।

5.1.2 *एक अंतराल में सांतत्य*

(i) f एक खुले अंतराल (a, b) में संतत कहा जाता है, यदि वह इस अंतराल में प्रत्येक बिंदु पर संतत हो।

(ii) f एक बंद अंतराल $[a, b]$ में संतत कहा जाता है, यदि

- f अंतराल (a, b) में संतत हो।
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

5.1.3 सांतत्य का ज्यामितीय अर्थ

(i) $x = c$ पर फलन f संतत होगा, यदि बिंदु $(c, f(c))$ पर इस फलन के आलेख में कोई विच्छेदन न हो।

(ii) एक अंतराल में कोई फलन संतत कहा जाता है, यदि इस संपूर्ण अंतराल में उस फलन के आलेख में कोई विच्छेदन न हो।

5.1.4 असांतत्य

फलन f बिंदु $x = a$ पर निम्नलिखित स्थितियों में से किसी में भी असंतत होगा:

(i) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ और $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ का अस्तित्व है, परंतु ये बराबर नहीं हैं।

(ii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ और $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ के अस्तित्व बराबर हैं, परंतु इनका मान $f(a)$ के बराबर नहीं हैं।

(iii) $f(a)$ परिभाषित नहीं है।

5.1.5 कुछ सामान्य फलनों का सांतत्य

फलन $f(x)$	अंतराल जिसमें f संतत है
1. अचर फलन, अर्थात् $f(x) = c$	R
2. तत्समक फलन, अर्थात् $f(x) = x$	R
3. बहुपद फलन, अर्थात् $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$	R
4. $\lvert x - a \rvert$	$(-\infty, \infty)$
5. x^{-n}, n एक धनात्मक पूर्णांक है	$(-\infty, \infty) - \{0\}$
6. $p(x) / q(x)$, जहाँ $p(x)$ और $q(x)$ चर x में बहुपद हैं	$\mathbf{R} - \{x : q(x) = 0\}$
7. $\sin x$, $\cos x$	R
8. $\tan x$, $\sec x$	$\mathbf{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbf{Z}\}$

9. $\cot x, \operatorname{cosec} x$ — $\mathbf{R} - \{ (n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$
10. e^x — $\mathbf{R}$
11. $\log x$ — $(0, \infty)$
12. अपने संगत प्रांतों में प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन अर्थात् $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x$ इत्यादि।

5.1.6 *संयोजित फलनों का सांतत्य*

मान लीजिए कि f और g वास्तविक मानों वाले ऐसे फलन हैं कि (fog) बिंदु a पर परिभाषित है। यदि a पर g संतत है तथा $g(a)$ पर f संतत है, तो (fog) बिंदु a पर संतत होता है।

5.1.7 *अवकलनीयता*

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, जहाँ भी सीमा का अस्तित्व हो, से परिभाषित फलन को x पर f के अवकलज के रूप में परिभाषित किया जाता है। दूसरे शब्दों में हम कहते हैं कि कोई फलन f अपने प्रांत में किसी बिंदु c पर अवकलनीय होता है, यदि $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$, जिसे वाम अवकलज कहा जाता है और $Lf'(c)$ से व्यक्त किया जाता है तथा $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$, जिसे दक्षिण अवकलज कहा जाता है और $Rf'(c)$ से व्यक्त किया जाता है, दोनों ही परिमित हों तथा परस्पर बराबर हों।

(i) फलन $y = f(x)$ को एक खुले अंतराल (a, b) में अवकलनीय कहा जाता है, यदि वह (a, b) के प्रत्येक बिंदु पर अवकलनीय होता है।

(ii) फलन $y = f(x)$ को एक बंद अंतराल $[a, b]$ में अवकलनीय कहा जाता है, यदि $Rf'(a)$ और $Lf'(b)$ का अस्तित्व हो तथा (a, b) के प्रत्येक बिंदु के लिए $f'(x)$ का अस्तित्व हो।

(iii) प्रत्येक अवकलनीय फलन संतत होता है, परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

5.1.8 *अवकलजों का बीजगणित*

यदि u और v चर x के फलन हैं, तो

(i) $\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$ (ii) $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ (iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

5.1.9 शृंखला नियम फलनों के संयोजन को अवकलित करने के लिए एक नियम है। मान लीजिए कि $f = vou$ । यदि $t = u(x)$ तथा $\frac{dt}{dx}$ और $\frac{dv}{dt}$ दोनों का ही अस्तित्व है तो $\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ ।

5.1.10 कुछ मानक अवकलज (अपने उपयुक्त प्रांतों में) निम्नलिखित हैं:

1. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
4. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$
5. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x|>1$
6. $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x|>1$

5.1.11 ***चरघातांकी और लघुगणकीय फलन***

(i) मान लीजिए धनात्मक आधार $b > 1$ वाला चरघातांकी फलन $y = f(x) = b^x$ है। इसका प्रांत सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय **R** है तथा परिसर सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। आधार 10 वाला चरघातांकी फलन सामान्य चरघातांकी फलन कहलाता है तथा आधार e वाला चरघातांकी फलन प्राकृतिक चरघातांकी फलन कहलाता है।

(ii) मान लीजिए कि $b > 1$, यदि $b^x = a$ तो आधार b पर a के लघुगणक, x होता है। इसे $\log_b a = x$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। यदि आधार $b = 10$ हो, तो इसे सामान्य लघुगणक कहा जाता है तथा यदि आधार $b = e$ हो, तो इसे प्राकृतिक लघुगणक कहा जाता है। $\log x$ आधार $- e$ पर लघुगणक फलन को व्यक्त करता है। लघुगणकीय फलन का प्रांत सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\mathbf{R}^+$ है तथा इसका परिसर सभी वास्तविक संख्याओं समुच्चय R है।

(iii) किसी भी आधार $b > 1$ के लिए, लघुगणकीय फलन के गुण नीचे लिखे जा रहे हैं:

1. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y \,;\, x > 0;\ y > 0$
2. $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
4. $\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$, जहाँ $c > 1$ हैं।
5. $\log_b x = \frac{1}{\log_x b}$

3. $\log_b x^n = n \log_b x$ 6. $\log_b b = 1$ और $\log_b 1 = 0$

(iv) x के सापेक्ष e^x का अवकलज e^x है, अर्थात् $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ है। x के सापेक्ष $(\log x)$ का अवकलज $\frac{1}{x}$ है, अर्थात् $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$ है।

5.1.12 $f(x) = (u(x))^{v(x)}$, के रूप के फलनों को अवकलित करने के लिए, लघुगणकीय अवकलन एक सशक्त तकनीक है जहाँ f और u दोनों का, इस तकनीक का कुछ अर्थ होने के लिए, धनात्मक फलन होना आवश्यक है।

5.1.13 किसी फलन का एक अन्य फलन के सापेक्ष अवकलन

मान लीजिए कि $u = f(x)$ और $v = g(x)$ चर x के दो फलन हैं। तब, $g(x)$ के सापेक्ष $f(x)$ का अवकलज ज्ञात करने के लिए, अर्थात् $\frac{du}{dv}$ ज्ञात करने के लिए, हम सूत्र

$$\frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$$ का उपयोग करते हैं।

5.1.14 द्वितीय कोटि अवकलज

$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, फलन y का x के सापेक्ष द्वितीय कोटि अवकलज कहलाता है। यदि $y = f(x)$ हो, तो इसे y'' या y_2 से व्यक्त करते हैं।

5.1.15 रोले का प्रमेय

मान लीजिए कि $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ अंतराल $[a, b]$ पर संतत और (a, b) पर अवकलनीय इस प्रकार है कि $f(a) = f(b)$, जहाँ a और b कोई वास्तविक संख्याएँ हैं। तब (a, b) में न्यूनतम एक बिंदु c का अस्तित्व इस प्रकार है कि $f'(c) = 0$।

ज्यामितीय रूप से, रोले का प्रमेय यह सुनिश्चित करता है कि वक्र $y = f(x)$ पर न्यूनतम एक बिंदु ऐसा है कि जिस पर वक्र की स्पर्श रेखा x-अक्ष के समांतर है (बिंदु का भुज (a, b)में स्थित है)।

5.1.16 माध्यमान प्रमेय (लग्रांज)

मान लीजिए कि $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ अंतराल $[a, b]$ पर एक संतत फलन है तथा (a, b) पर अवकलनीय

है। तब, (a, b) में कम से कम एक बिंदु c ऐसा है कि $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ होता है।

ज्यामितीय रूप से, माध्य मान प्रमेय यह कहती है कि (a, b) में न्यूनतम एक ऐसे बिंदु c का अस्तित्व है कि बिंदु $(c, f(c))$ पर स्पर्श रेखा बिंदुओं $(a, f(a))$ और $(b, f(b))$ को मिलाने वाली रेखाखंड के समांतर होती है।

5.2 हल उदाहरण

लघु उत्तरीय (S.A.)

उदाहरण 1 अचर k का मान ज्ञात कीजिए ताकि फलन f, $x = 0$ पर संतत हो, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 4x}{8x^2}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$ है।

हल यह दिया है कि फलन $f, x = 0$ पर संतत है। अत:, $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ है।

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 4x}{8x^2} = k$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 2x}{8x^2} = k$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 = k$$

$$\Rightarrow \quad k = 1$$

अत:, यदि $f, x = 0$ पर संतत है, तो k का मान 1 होगा।

उदाहरण 2 फलन $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ के सांतत्य की चर्चा कीजिए।

हल क्योंकि $\sin x$ और $\cos x$ संतत फलन हैं तथा दो संतत फलनों का गुणनफल एक संतत फलन होता है, इसलिए $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ एक संतत फलन है।

उदाहरण 3 यदि $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+x^2-16x+20}{(x-2)^2}, & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases}$ $x = 2$ पर संतत है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल $f(2) = k$ दिया है।

अब, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{(x-2)^2}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+5)(x-2)^2}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2}(x+5) = 7$$

क्योंकि $x = 2$ पर f संतत है, इसलिए हमें प्राप्त होता है:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$

$\Rightarrow$ $k = 7$

उदाहरण 4 दर्शाइए कि $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f, $x = 0$ पर संतत है।

हल $x = 0$ पर, वाम पक्ष की सीमा नीचे दिए अनुसार प्राप्त होती है-

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x\sin\frac{1}{x} = 0 \qquad [\text{क्योंकि } -1 < \sin\frac{1}{x} < 1]$$

इसी प्रकार, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x\sin\frac{1}{x} = 0$ है। साथ ही, $f(0) = 0$ है।

इस प्रकार, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ है। अतः, $x = 0$ पर फलन f संतत है।

उदाहरण 5 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ दिया है। संयोजित फलन $y = f\,[f(x)]$ में असंतत के बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि फलन $f(x) = \frac{1}{x-1}$ बिंदु $x = 1$ पर असंतत है।

अब $x \neq 1$ के लिए,

$$f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x-1} - 1} = \frac{x-1}{2-x}$$

जो $x = 2$ पर असंतत है।

अतः वाँछित असंतत बिंदु $x = 1$ और $x = 2$ हैं।

उदाहरण 6 मान लीजिए कि सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए, $f(x) = x|x|$ तो। $x = 0$ पर, $f(x)$ की अवकलजता की चर्चा कीजिए।

हल हम f को पुन: निम्नलिखित रूप में लिख सकते है: $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ यदि } x \geq 0 \\ -x^2, \text{ यदि } x < 0 \end{cases}$

अब, $Lf'(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} h = 0$

तथा $Rf'(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} h = 0$

क्योंकि वाम अवकलज और दक्षिण अवकलज दोनों बराबर हैं अत: $x = 0$ पर f अवकलनीय है।

उदाहरण 7 $\sqrt{\tan \sqrt{x}}$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

हल मान लीजिए कि $y = \sqrt{\tan \sqrt{x}}$ है। शृंखला नियम का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\tan \sqrt{x}}} \cdot \frac{d}{dx}(\tan \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tan \sqrt{x}}} \cdot \sec^2 \sqrt{x} \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tan \sqrt{x}}} (\sec^2 \sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{(\sec^2 \sqrt{x})}{4\sqrt{x}\sqrt{\tan \sqrt{x}}}$$

उदाहरण 8 यदि $y = \tan(x + y)$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल $y = \tan(x + y)$ दिया है। दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(x + y) \frac{d}{dx}(x + y)$$

$$= \sec^2(x + y) \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

या $\quad [1 - \sec^2 (x + y] \dfrac{dy}{dx} = \sec^2 (x + y)$

अत:, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sec^2 (x+y)}{1-\sec^2 (x+y)} = -\text{cosec}^2 (x + y)$

उदाहरण 9 यदि $e^x + e^y = e^{x+y}$ दिया है, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx} = -e^{y-x}$ है।

हल $e^x + e^y = e^{x+y}$ दिया है। दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$e^x + e^y \frac{dy}{dx} = e^{x+y} \left(1+\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{या} \quad (e^y - e^{x+y}) \frac{dy}{dx} = e^{x+y} - e^x$$

जिसके फलस्वरूप $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{x+y} - e^x}{e^y - e^{x+y}} = \dfrac{e^x + e^y - e^x}{e^y - e^x - e^y} = -e^{y-x}$.

उदाहरण 10 यदि $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{3x - x^3}{1-3x^2}\right), -\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ है, तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल $x = \tan\theta$ रखिए, जहाँ $\dfrac{-\pi}{6} < \theta < \dfrac{\pi}{6}$

अत: $\quad y = \tan^{-1}\left(\dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right)$

$= \tan^{-1} (\tan 3\theta)$

$= 3\theta \qquad \left(\text{क्योंकि } \dfrac{-\pi}{2} < 3\theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$= 3\tan^{-1}x$

इसलिए, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{1+x^2}$.

उदाहरण 11 यदि $y = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x^2}\right\}$ और $0 < x < 1$ है, तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल हमें प्राप्त है: $y = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x^2}\right\}$ है, जहाँ $0 < x < 1$

$x = \sin A$ और $\sqrt{x} = \sin B$ रखने पर:

$$y = \sin^{-1}\left\{\sin A\sqrt{1-\sin^2 B} - \sin B\sqrt{1-\sin^2 A}\right\}$$

$$= \sin^{-1}\{\sin A\cos B - \sin B\cos A\}$$

$$= \sin^{-1}\{\sin(A-B)\} = A - B$$

इस प्रकार, $\qquad y = \sin^{-1} x - \sin^{-1}\sqrt{x}$

x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

उदाहरण 12 यदि $x = a\sec^3\theta$ और $y = a\tan^3\theta$ है, तो $\theta = \frac{\pi}{3}$ पर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल हमें $x = a\sec^3\theta$ और $y = a\tan^3\theta$ प्राप्त है।

θ के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{dx}{d\theta} = 3a\sec^2\theta\frac{d}{d\theta}(\sec\theta) = 3a\sec^3\theta\tan\theta$$

तथा $$\frac{dy}{d\theta} = 3a\tan^2\theta\frac{d}{d\theta}(\tan\theta) = 3a\tan^2\theta\sec^2\theta$$

इस प्रकार, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\tan^2\theta\sec^2\theta}{3a\sec^3\theta\tan\theta} = \frac{\tan\theta}{\sec\theta} = \sin\theta$$

अतः, $$\left(\frac{dy}{dx}\right)\text{at } \theta\frac{\pi}{3}\text{ पर} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

उदाहरण 13 यदि $x^y = e^{x-y}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$

हल हमें प्राप्त है: $x^y = e^{x-y}$ दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$y\log x = x - y$$

$\Rightarrow$ $y(1 + \log x) = x$

अर्थात् $y = \dfrac{x}{1+\log x}$ दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x).1 - x\dfrac{1}{x}}{(1+\log x)^2} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

उदाहरण 14 यदि $y = \tan x + \sec x$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ है।

हल हमें प्राप्त है: $y = \tan x + \sec x$

x के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \sec x \tan x$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$

इस प्रकार, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-\sin x}$ अब, x के सापेक्ष पुनः अवकलित करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

उदाहरण 15 यदि $f(x) = |\cos x|$ है, तो $f'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ ज्ञात कीजिए।

हल जब $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ तो $\cos x < 0$, जिससे $|\cos x| = -\cos x$, अर्थात् $f(x) = -\cos x$ है।

$f'(x) = \sin x$

अतः $f'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

उदाहरण 16 यदि $f(x) = |\cos x - \sin x|$ है, तो $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ ज्ञात कीजिए।

हल जब $0 < x < \frac{\pi}{4}$ है, तो $\cos x > \sin x$ होता है, जिससे $\cos x - \sin x > 0$ है, अर्थात् $f(x) = \cos x - \sin x$ है।

$f'(x) = -\sin x - \cos x$

अतः $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ है।

उदाहरण 17 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में फलन $f(x) = \sin 2x$ के लिए रोले के प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

हल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में फलन $f(x) = \sin 2x$ पर विचार कीजिए। ध्यान दीजिए कि:

(i) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में फलन f संतत है, क्योंकि f एक साइन (sine) फलन है, जो सदैव संतत होता है।

(ii) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में $f'(x) = 2\cos 2x$ का अस्तित्व है। अतः, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में f अवकलनीय है।

(iii) $f(0) = \sin 0 = 0$ है तथा $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\pi = 0$ है। इससे $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ है।

यहाँ रोले के प्रमेय के प्रतिबंध संतुष्ट हो जाते हैं। अतः, कम से कम एक ऐसे बिन्दु $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ का अस्तित्व है ताकि $f'(c) = 0$ है। इस प्रकार,

$$2\cos 2c = 0 \quad \Rightarrow \quad 2c = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\pi}{4}$$

उदाहरण 18 [3, 5] में फलन $f(x) = (x-3)(x-6)(x-9)$ के लिए माध्यमान प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

हल (i) [3, 5] में फलन f संतत है, क्योंकि बहुपद फलनों का गुणनफल एक बहुपद है, जो संतत है।

(ii) (3, 5) में $f'(x) = 3x^2 - 36x + 99$ का अस्तित्व है। अतः, यहाँ (3, 5) में अवकलनीय है। इस प्रकार, माध्यमान प्रमेय के प्रतिबंध संतुष्ट हो जाते हैं। अतः कम से कम एक ऐसे बिंदु $c \in (3, 5)$ के लिए–

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(3)}{5-3}$$

$$\Rightarrow 3c^2 - 36c + 99 = \frac{8-0}{2} = 4$$

$$\Rightarrow c = 6 \pm \sqrt{\frac{13}{3}}$$

अत:, $c = 6 - \sqrt{\frac{13}{3}}$ (क्योंकि दूसरा मान अमान्य है।)

दीर्घ उत्तरीय उदाहरण (L.A.)

उदाहरण 19 यदि $f(x) = \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\cot x - 1}, x \neq \frac{\pi}{4}$ है, तो $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि $x = \frac{\pi}{4}$ पर $f(x)$ संतत बन जाए।

हल दिया है $f(x) = \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\cot x - 1}, x \neq \frac{\pi}{4}$

अत:,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\cot x - 1}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right)\sin x}{\cos x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right)}{\left(\sqrt{2}\cos x + 1\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{2}\cos x + 1\right)}{(\cos x - \sin x)} \cdot \frac{(\cos x + \sin x)}{(\cos x + \sin x)} . \sin x$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}\cos x + 1} (\sin x)$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos 2x} \cdot \left(\frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right) (\sin x)$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x + \sin x)}{\sqrt{2}\cos x + 1} \sin x$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}+1} = \frac{1}{2}$$

इस प्रकार, $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \frac{1}{2}$ यदि हम $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ परिभाषित करें, तो $\frac{x}{4}$ पर $f(x)$ संतत बन जाएगा।

अतः, f के $x = \frac{\pi}{4}$ पर संतत होने के लिए $f\ \frac{\pi}{4}\ = \frac{1}{2}$ है।

उदाहरण 20 दर्शाइए कि $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$ द्वारा दिया जाने वाला फलन f बिंदु $x = 0$ पर असंतत है।

हल $x = 0$ पर :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

इसी प्रकार, $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}{1+\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{\frac{-1}{x}}}{1+e^{\frac{-1}{x}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

इस प्रकार, $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, है। अतः, $\lim_{x\to 0} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है। इसीलिए, $x = 0$ पर f असंतत है।

उदाहरण 21 मान लीजिए कि $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 4x}{x^2}, & \text{यदि } x<0 \\ a, & \text{यदि } x=0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{16+\sqrt{x}}-4}, & if\ x>0 \end{cases}$ है।

a के किस मान के लिए $x = 0$ पर f संतत है?

हल यहाँ $f(0) = a$ है तथा 0 पर f की वाम सीमा है:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos 4x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\sin^2 2x}{x^2}$$

$$= \lim_{2x\to 0^-} 8 \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 = 8\,(1)^2 = 8$$

तथा 0 पर f की दक्षिण सीमा है:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{16+\sqrt{x}}-4}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\,(\sqrt{16+\sqrt{x}}+4)}{(\sqrt{16+\sqrt{x}}+4)(\sqrt{16+\sqrt{x}}-4)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\,(\sqrt{16+\sqrt{x}}+4)}{16+\sqrt{x}-16} = \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{16+\sqrt{x}}+4\right) = 8$$

इस प्रकार, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 8$ है। अतः, $x = 0$ पर f केवल तभी संतत होगा जब $a = 8$ हो।

उदाहरण 22 $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{यदि } -3 \le x < -2 \\ x+1, & \text{यदि } -2 \le x < 0 \\ x+2, & \text{यदि } 0 \le x \le 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन की अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

हल $f(x)$ की अवकलनीयता के संदेहास्पद बिंदु केवल $x = -2$ और $x = 0$ हैं।
$x = -2$ पर अवलनीयता के लिए:

$$\text{अब, } \quad \mathrm{L}f'(-2) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{2(-2+h)+3-(-2+1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^-} 2 = 2$$

$$\text{तथा } \quad \mathrm{R}f'(-2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-2+h+1-(-2+1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h-1-(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

इस प्रकार, $\mathrm{R}f'(-2) \neq \mathrm{L}f'(-2)$ है। अत:, $x = -2$ पर, f अवकलनीय नहीं है।
इसी प्रकार, $x = 0$ पर फलन की अवकलनीयता के लिए, हमें

$$\mathrm{L}\,(f'(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{0+h+1-(0+2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} 1-\frac{1}{h}$$

जिसका अस्तित्व नहीं है। अत:, $x = 0$ पर फलन अवकलनीय नहीं है।

उदाहरण 23 $\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ के सापेक्ष $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ को अवकलित कीजिए, जहाँ

$x \in \frac{1}{\sqrt{2}},1$ है।

हल मान लीजिए कि $u = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ और $v = \cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ है।

हम $\frac{du}{dv}=\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$ ज्ञात करना चाहते हैं।

अब $u = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ में $x = \sin\theta$ रखिए, जहाँ $\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ है।

तब, $u = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta} = \tan^{-1} (\cot \theta)$

$$= \tan^{-1} \left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=\frac{\pi}{2}-\theta =\frac{\pi}{2}-\sin^{-1} x$$

अतः, $\frac{du}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ होगा।

अब $v = \cos^{-1} (2x \sqrt{1-x^2})$

या, $v = \frac{\pi}{2}-\sin^{-1} (2x \sqrt{1-x^2})$; $x = \sin v$ रखने पर:

$$= \frac{\pi}{2}-\sin^{-1} (2\sin\theta \sqrt{1-\sin^2\theta})=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}(\sin 2\theta)$$

$$= \frac{\pi}{2}-\sin^{-1}(\sin (\pi - 2\theta)) \quad [\text{क्योंकि } \frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi]$$

$$=\frac{\pi}{2}-(\pi-2\theta)=\frac{-\pi}{2}+2\theta$$

अतः $v = \frac{-\pi}{2} + 2\sin^{-1}x$

$\Rightarrow$ $\frac{dv}{dx}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

अतः $$\frac{du}{dv}=\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}=\frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}=\frac{-1}{2}.$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरणों 24 से 35 तक प्रत्येक में, दिए हुए चारों विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

उदाहरण 24 यदि फलन $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}+\cos x, & \text{यदि } x\neq 0\\ k, & \text{यदि } x=0\end{cases}$ बिंदु $x = 0$ पर संतत है, तो k का मान है

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 1.5

हल (B) सही उत्तर है।

उदाहरण 25 फलन $f(x) = [x]$, जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन को व्यक्त करता है, निम्नलिखित पर संतत है

(A) 4 (B) – 2 (C) 1 (D) 1.5

हल (D) सही उत्तर है। महत्तम पूर्णांक फलन $[x]$, x के सभी पूर्णांकीय मानों पर असंतत है। अतः, D सही उत्तर है।

उदाहरण 26 उन बिंदुओं की संख्या, जिन पर फलन $f(x)=\frac{1}{x-[x]}$ संतत नहीं है,

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D)इनमें से कोई नहीं

हल (D) सही उत्तर है। क्योंकि जब x एक पूर्णांक है, तो $x - [x] = 0$ है, इसलिए दिया हुआ फलन सभी $x \in \mathbf{Z}$ के लिए असंतत है।

उदाहरण 27 $f(x) = \tan x$ द्वारा दिए जाने वाला फलन निम्नलिखित समुच्चय पर असंतत है

(A) $\{n\pi : n\in\mathbf{Z}\}$ (B) $\{2n\pi : n\in\mathbf{Z}\}$ (C) $(2n+1)\frac{\pi}{2} : n\in\mathbf{Z}$ (D) $\frac{n\pi}{2} : n\in\mathbf{Z}$

हल (C) सही उत्तर है।

उदाहरण 28 मान लीजिए कि $f(x) = |\cos x|$ है। जब,

(A) f प्रत्येक स्थान पर अवकलनीय है

(B) f प्रत्येक स्थान पर संतत है, परंतु $x = n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$ पर अवकलनीय नहीं है

(C) f प्रत्येक स्थान पर संतत है, परंतु $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ पर अवकलनीय नहीं है

(D) इनमें से कोई नहीं

हल (C) सही उत्तर है।

उदाहरण 29 फलन $f(x) = |x| + |x - 1|$

(A) $x = 0$ तथा $x = 1$ दोनों पर संतत है (B) $x = 1$ पर संतत है, परंतु $x = 0$ पर संतत नहीं है

(C) $x = 0$ तथा $x = 1$ दोनों पर असंतत है (D) $x = 0$ पर संतत है, परंतु $x = 1$ पर संतत नहीं है

हल: सही उत्तर (A) है।

उदाहरण 30 k का वह मान, जो $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ k, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$

द्वारा परिभाषित फलन को $x = 0$ पर संतत बना दे,

(A) 8 (B) 1 (C) –1 (D) इनमें से कोई नहीं

हल (D) सही उत्तर है। नि:संदेह, $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ का अस्तित्व नहीं है।

उदाहरण 31 उन बिंदुओं का सम्मुच्चय, जहाँ $f(x) = |x - 3| \cos x$ द्वारा दिया जाने वाला फलन अवकलनीय है,

(A) $\mathbf{R}$ (B) $\mathbf{R} - \{3\}$ (C) $(0, \infty)$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल (B) सही उत्तर है।

उदाहरण 32 x के सापेक्ष $\sec(\tan^{-1}x)$ का अवकल गुणांक है

(A) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (B) $\frac{x}{1+x^2}$ (C) $x\sqrt{1+x^2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

हल (A) सही उत्तर है।

उदाहरण 33 यदि $u = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ और $v = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ है, तो $\frac{du}{dv}$ है

(A) $\frac{1}{2}$ (B) x (C) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ (D) 1

हल (D) सही उत्तर है।

उदाहरण 34 फलन $f(x) = e^x \sin x,\ x \in [0, \pi]$ के लिए, रोले के प्रमेय में c का मान है

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

हल (D) सही उत्तर है।

उदाहरण 35 फलन $f(x) = x(x-2),\ x \in [1, 2]$ के लिए, माध्य मान प्रमेय में c का मान है

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$

हल (A) सही उत्तर है।

उदाहरण 36 निम्नलिखित का सुमेलन कीजिए-

स्तंभ I	स्तंभ II
(A) यदि फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ \frac{k}{2}, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$ $x = 0$ पर संतत है, तो k बराबर है	(a) $\lvert x \rvert$
(B) प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है	(b) सत्य
(C) एक फलन का उदाहरण, जो प्रत्येक स्थान पर संतत है, परंतु ठीक एक स्थान पर अवकलनीय नहीं है	(c) 6
(D) तत्समक फलन, अर्थात, $f(x) = x\ \forall x \in \mathbf{R}$ एक संतत फलन है	(d) असत्य

हल $A \to c,\ B \to d,\quad C \to a,\ D \to b$

उदाहरणों 37 से 41 तक प्रत्येक में रिक्त स्थानों को भरिए-

उदाहरण 37 उन बिंदुओं की संख्या, जहाँ फलन $f(x) = \frac{1}{\log|x|}$ असंतत है, ________ है।

हल दिया हुआ फलन $x = 0, \pm 1$ बिंदुओं पर असंतत है। अतः, असंततता के बिंदुओं की वाँछित संख्या 3 है।

उदाहरण 38 यदि $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{if } x \geq 1 \\ x + 2 & \text{if } x < 1 \end{cases}$ संतत है, तो a _______ के बराबर मान होना चाहिए।

हल $a = 2$

उदाहरण 39 x के सापेक्ष $\log_{10} x$ का अवकलज ________ है।

हल $(\log_{10} e)\dfrac{1}{x}$

उदाहरण 40 यदि $y = \sec^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) + \sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$ है, तो $\dfrac{dy}{dx}$ = ______ है।

हल 0

उदाहरण 41 $\cos x$ के सापेक्ष $\sin x$ का अवकलज ________ है।

हल $-\cot x$

उदाहरण 42 से 46 तक प्रत्येक में बताइए कि कथन सत्य है या असत्य –

उदाहरण 42 $x = a$, पर $f(x)$ संततता के लिए? $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ और $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ में से प्रत्येक $f(a)$ के बराबर होता है।

हल सत्य

उदाहरण 43 $y = |x - 1|$ एक संतत फलन है।

हल सत्य

उदाहरण 44 एक संतत फलन में कुछ ऐसे बिंदु हो सकते हैं जहाँ सीमाओं का अस्तित्व न हों।

हल असत्य

उदाहरण 45 $|\sin x|$ चर x के प्रत्येक मान के लिए एक अवकलनीय फलन है।

हल असत्य

उदाहरण 46 $\cos |x|$ प्रत्येक स्थान पर अवकलनीय है।

हल सत्य

5.3 प्रश्नावली

संक्षिप्त उत्तर (S.A.)

1. फलन $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ को $x = 1$ पर संततता की जाँच कीजिए।

ज्ञात कीजिए कि प्रश्न 2 से 10 तक में दिए फलनों में से कौन से फलन इंगित बिंदुओं पर संतत या असंतत हैं:

2. $x = 2$ पर $f(x) = \begin{cases} 3x+5, & \text{यदि } x \geq 2 \\ x^2, & \text{यदि } x < 2 \end{cases}$

3. $x = 0$ पर $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 5, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$

4. $x=2$ पर $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}, & \text{यदि } x\neq 2\\ 5, & \text{यदि } x=2\end{cases}$

5. $x=4$ पर $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-4|}{2(x-4)}, & \text{यदि } x\neq 4\\ 0, & \text{यदि } x=4\end{cases}$

6. $x=0$ पर $f(x)=\begin{cases}|x|\cos\dfrac{1}{x}, & \text{यदि } x\neq 0\\ 0, & \text{यदि } x=0\end{cases}$

7. $x=a$ पर $f(x)=\begin{cases}|x-a|\sin\dfrac{1}{x-a}, & \text{यदि } x\neq 0\\ 0, & \text{यदि } x=a\end{cases}$

8. $x=0$ पर $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{यदि } x\neq 0\\ 0, & \text{यदि } x=0\end{cases}$

9. $x=1$ पर $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & \text{यदि } 0\leq x\leq 1\\ 2x^2-3x+\dfrac{3}{2}, & \text{यदि } 1<x\leq 2\end{cases}$

10. $x=1$ पर $(x)=|x|+|x-1|$

प्रश्न 11 से 14 तक प्रत्येक में k का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए फलन इंगित बिंदु पर संतत है:

11. $x=5$ पर $f(x)=\begin{cases} 3x-8, & \text{यदि } x\le 5 \\ 2k, & \text{यदि } x>5 \end{cases}$

12. $x=2$ पर $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2^{x+2}-16}{4^x-16}, & \text{यदि } x\ne 2 \\ k, & \text{यदि } x=2 \end{cases}$

13. $x=0$ पर $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+kx}-\sqrt{1-kx}}{x}, & \text{यदि } -1\le x<0 \\ \dfrac{2x+1}{x-1}, & \text{यदि } 0\le x\le 1 \end{cases}$

14. $x=0$ पर $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos kx}{x\sin x}, & \text{यदि } x\ne 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{यदि } x=0 \end{cases}$

15. सिद्ध कीजिए कि $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|+2x^2}, & x\ne 0 \\ k & x=0 \end{cases}$ से परिभाषित फलन f बिंदु $x=0$ पर असंतत रहता है, चाहे k का कोई भी मान लिया जाए।

16. a और b के मान ज्ञात कीजिए जिसके लिये दिया हुआ फलन

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-4}{|x-4|}+a, & \text{यदि } x<4 \\ a+b, & \text{यदि } x=4 \\ \dfrac{x-4}{|x-4|}+b, & \text{यदि } x>4 \end{cases}$$

बिंदु $x=4$ पर संतत है।

17. फलन $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ दिया है। संयोजित फलन $y=f(f(x))$ में असंतत्य के बिंदु ज्ञात कीजिए।

18. फलन $f(t)=\dfrac{1}{t^2+t-2}$ की असंततता के सभी बिंदु ज्ञात कीजिए, जहाँ $t=\dfrac{1}{x-1}$ है।

19. दर्शाइए कि फलन $f(x) = |\sin x + \cos x|$ बिंदु $x = \pi$ पर संतत है।

प्रश्न 20 से 22 में, f की अवकलनीयता की जाँच कीजिए जब कि f निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है–

20. $x = 2$ पर, $f(x) = \begin{cases} x[x], & \text{यदि } 0 \le x < 2 \\ (x-1)x, & \text{यदि } 2 \le x < 3 \end{cases}$

21. $x = 0$ पर, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{यदि } x \ne 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$

22. $x = 2$ पर, $f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{यदि } x \le 2 \\ 5-x, & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$

23. दर्शाइए कि $x = 5$ पर, $f(x) = |x-5|$ संतत है, परंतु अवकलनीय नहीं है।

24. एक फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ सभी $x, y \in \mathbf{R}, f(x) \ne 0$ के लिए समीकरण $f(x+y) = f(x) f(y)$ को संतुष्ट करता है। मान लीजिए कि यह फलन $x = 0$ पर अवकलनीय है तथा $f'(0) = 2$ है। सिद्ध कीजिए कि $f'(x) = 2 f(x)$ है।

निम्नलिखित प्रश्न 25 से 43 तक प्रत्येक को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए–

25. $2^{\cos^2 x}$ **26.** $\dfrac{8^x}{x^8}$ **27.** $\log\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)$

28. $\log\left[\log\left(\log x^5\right)\right]$ **29.** $\sin\sqrt{x} + \cos^2\sqrt{x}$ **30.** $\sin^n(ax^2 + bx + c)$

31. $\cos\left(\tan\sqrt{x+1}\right)$ **32.** $\sin x^2 + \sin^2 x + \sin^2(x^2)$ **33.** $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

34. $(\sin x)^{\cos x}$ **35.** $\sin^m x \cdot \cos^n x$ **36.** $(x+1)^2 (x+2)^3 (x+3)^4$

37. $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right), \dfrac{-\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$ **38.** $\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right), -\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$

39. $\tan^{-1}(\sec x + \tan x), -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

40. $\tan^{-1}\left(\dfrac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right), -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ तथा $\dfrac{a}{b}\tan x > -1$

41. $\sec^{-1}\left(\dfrac{1}{4x^3 - 3x}\right), 0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

42. $\tan^{-1}\dfrac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}, \dfrac{-1}{\sqrt{3}} < \dfrac{x}{a} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

43. $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right), -1<x<1, x\neq 0$

प्रश्न 44 से 48 तक प्राचलिक रूप में दिये फलनों में से प्रत्येक के लिए $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कजिए –

44. $x = t + \dfrac{1}{t}, \; y = t - \dfrac{1}{t}$

45. $x = e^{q}\left(\theta + \dfrac{1}{\theta}\right), \; y = e^{-\theta}\left(\theta - \dfrac{1}{\theta}\right)$

46. $x = 3\cos q - 2\cos^3 q, \; y = 3\sin q - 2\sin^3 q$

47. $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \; \tan y = \dfrac{2t}{1-t^2}$

48. $x = \dfrac{1+\log t}{t^2}, \; y = \dfrac{3+2\log t}{t}$

49. यदि $x = e^{\cos 2t}$ और $y = e^{\sin 2t}$, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y\log x}{x\log y}$ है।

50. यदि $x = a\sin 2t\,(1 + \cos 2t)$ और $y = b\cos 2t\,(1 - \cos 2t)$ तो दर्शाइए कि ,

$x = \dfrac{\pi}{4}$ पर; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a}$

51. यदि $x = 3\sin t - \sin 3t$ और $y = 3\cos t - \cos 3t$ तो $t = \dfrac{\pi}{3}$ पर $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

52. $\sin x$ के सापेक्ष $\dfrac{x}{\sin x}$ को अवकलित कीजिए।

53. $\tan^{-1}x$ के सापेक्ष $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ को अवकलित कीजिए, जब $x \neq 0$.

प्रश्न 54 से 57 तक प्रत्येक में $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जबकि x और y दिये हुए संबंध से संयोजित हैं

54. $\sin(xy) + \frac{x}{y} = x^2 - y$ **55.** $\sec(x + y) = xy$

56. $\tan^{-1}(x^2 + y^2) = a$ **57.** $(x^2 + y^2)^2 = xy$

58. यदि $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dy}=1$

59. यदि $x=e^{\frac{x}{y}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x\log x}$

60. यदि $y^x=e^{y-x}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\log y)^2}{\log y}$

61. यदि $y=(\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)\ldots\ldots\infty}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2\tan x}{y\log\cos x-1}$

62. यदि $x\sin(a+y)+\sin a\cos(a+y)=0$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

63. यदि $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=a(x-y)$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

64. यदि $y=\tan^{-1}x$ तो केवल y के पदों में $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 65 से 69 तक दिये फलनों में से प्रत्येक के लिए रोले के प्रमेय का सत्यापन कीजिए–

65. $[0, 1]$ में $f(x) = x(x-1)^2$ **66.** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ esa $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

67. $[-1, 1]$ में $f(x) = \log(x^2 + 2) - \log 3$ **68.** $[-3, 0]$ में $f(x) = x(x + 3)e^{-x/2}$

69. $[-2, 2]$ में $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

70. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{यदि } 0\le x\le 1 \\ 3-x, & \text{यदि } 1\le x\le 2 \end{cases}$ द्वारा दिए जाने वाले फलन पर रोले के प्रमेय की अनुप्रयोगता पर चर्चा कीजिए।

71. [0, 2p] में वक्र $y = (\cos x - 1)$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए, जहाँ स्पर्श रेखा x-अक्ष के समांतर है।

72. रोले के प्रमेय का प्रयोग करते हुए वक्र $y = x(x-4), x \hat{I} [0, 4]$ पर वह बिंदु ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखा x-अक्ष के समांतर है।

प्रश्न 73 से 76 तक दिये हुए फलनों में से प्रत्येक के लिए माध्यमान प्रमेय का सत्यापन कीजिए–

73. [1, 4] में $f(x) = \dfrac{1}{4x-1}$

74. [0, 1] में $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$

75. [0, p] में $f(x) = \sin x - \sin 2x$

76. [1, 5] में $f(x) = \sqrt{25-x^2}$

77. वक्र $y = (x-3)^2$ पर एक ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए, जिस पर स्पर्श रेखा (3, 0) और (4, 1) बिंदुओं को मिलाने वाली जीवा के समांतर हो।

78. माध्य मान प्रमेय का प्रयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि वक्र $y = 2x^2 - 5x + 3$ पर एक ऐसा बिंदु है जो A(1, 0) और B (2, 1) बिंदुओं के बीच स्थित है तथा उस पर खींची गयी स्पर्श रेखा जीवा AB के समांतर है। साथ ही, वह बिंदु भी ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

79. p और q के ऐसे मान ज्ञात कीजिए कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + p, & \text{यदि } x \le 1 \\ qx + 2, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$$

बिंदु $x = 1$ पर अवकलनीय हो।

80. यदि $x^m . y^n = (x+y)^{m+n}$ है तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ और (ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$

81. यदि $x = \sin t$ और $y = \sin pt$ है तो सिद्ध कीजिए कि $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + p^2y = 0$ है।

82. यदि $y = x^{\tan x} + \sqrt{\dfrac{x^2+1}{2}}$ है, तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 83 से 96 तक प्रत्येक में से दिये हुए चारों विकल्पों में से सही विकल्प चुनिए–

83. यदि $f(x) = 2x$ और $g(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ है तो निम्नलिखित में से कौन – सा फलन असंतत हो सकता है?

(A) $f(x) + g(x)$ (B) $f(x) - g(x)$ (C) $f(x) \cdot g(x)$ (D) $\frac{g(x)}{f(x)}$

84. फलन $f(x) = \frac{4-x^2}{4x-x^3}$

(A) केवल एक बिंदु पर असंतत है (B) ठीक दो बिंदुओं पर असंतत है

(C) ठीक तीन बिंदुओं पर असंतत है (D) इनमें से कोई नहीं

85. बिंदुओं का वह समुच्चय, जहाँ $f(x) = |2x-1| \sin x$ से दिये जाना वाला फलन f अवकलनीय है, निम्नलिखित है

(A) $\mathbf{R}$ (B) $\mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ (C) $(0, \infty)$ (D) इनमें से कोई नहीं

86. फलन $f(x) = \cot x$ निम्नलिखित समुच्चय पर असंतत है

(A) $\{x = n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$ (B) $\{x = 2n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$

(C) $\left\{x = (2n+1)\frac{\pi}{2} ; n \in \mathbf{Z}\right\}$ (D) $\left\{x = \frac{n\pi}{2} ; n \in \mathbf{Z}\right\}$

87. फलन $f(x) = e^{|x|}$

(A) प्रत्येक स्थान पर संतत है, परंतु $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है

(B) प्रत्येक स्थान पर संतत और अवकलनीय है

(C) $x = 0$ पर संतत नहीं है

(D) इनमें से कोई नहीं

88. यदि $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$] जहाँ $x \neq 0$ तो $x = 0$ पर फलन f का मान निम्नलिखित होगा यदि यह फलन $x = 0$ संतत है

(A) 0 (B) – 1 (C) 1 (D)इनमें से कोई नहीं

89. यदि $f(x) = \begin{cases} mx+1 & , \text{यदि } x \le \frac{\pi}{2} \\ \sin x + n, & \text{यदि } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ बिंदु $x = \frac{\pi}{2}$ पर संतत है तो

(A) $m = 1, n = 0$ (B) $m = \frac{n\pi}{2} + 1$ (C) $n = \frac{m\pi}{2}$ (D) $m = n = \frac{\pi}{2}$

90. मान लीजिए $f(x) = |\sin x|$ है, तब

(A) f प्रत्येक स्थान पर अवकलनीय है

(B) f प्रत्येक स्थान पर संतत है, परंतु $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$ पर अवकलनीय नहीं है

(C) f प्रत्येक स्थान पर संतत है परंतु $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$ पर अवकलनीय नहीं है

(D) इनमें से कोई नहीं

91. यदि $y = \log\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर है

(A) $\frac{4x^3}{1-x^4}$ (B) $\frac{-4x}{1-x^4}$ (C) $\frac{1}{4-x^4}$ (D) $\frac{-4x^3}{1-x^4}$

92. यदि $y = \sqrt{\sin x + y}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर है

(A) $\frac{\cos x}{2y-1}$ (B) $\frac{\cos x}{1-2y}$ (C) $\frac{\sin x}{1-2y}$ (D) $\frac{\sin x}{2y-1}$

93. $\cos^{-1}x$ के सापेक्ष $\cos^{-1}(2x^2 - 1)$ का अवकलज है

(A) 2 (B) $\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\frac{2}{x}$ (D) $1 - x^2$

94. यदि $x = t^2$ और $y = t^3$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ है

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{3}{4t}$ (C) $\frac{3}{2t}$ (D) $\frac{3}{2t}$

95. अंतराल $[0, \sqrt{3}]$ में फलन $f(x) = x^3 - 3x$ के लिए, रोले के प्रमेय में c का मान है

(A) 1 (B) -1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

96. फलन $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \in [1, 3]$ के लिए, माध्य मान प्रमेय में c का मान है

(A) 1 (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं

प्रश्न संख्या 97 से 101 तक प्रत्येक में रिक्त स्थानों को भरिए-

97. एक ऐसे फलन का उदाहरण जो सभी स्थानों पर संतत है, परंतु ठीक दो बिंदुओं पर अवकलनीय रहने में असमर्थ रहता है __________ है।

98. x^3 के सापेक्ष x^2 अवकलज __________ है।

99. यदि $f(x) = |\cos x|$ तो $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ ________

100. यदि $f(x) = |\cos x - \sin x|$ है तो $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) =$ ________

101. वक्र $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ के लिए, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ पर $\frac{dy}{dx}$ __________

प्रश्न संख्या 102 से 106 तक प्रत्येक में दिए हुए कथन के लिए बताइए कि यह सत्य है या असत्य-

102. $[0, 2]$ में फलन $f(x) = |x - 1|$ के लिए, रोले का प्रमेय प्रयुक्त है।

103. यदि f अपने प्राँत D पर संतत है, तो $|f|$ भी D पर संतत होगा।

104. दो संतत फलनों का संयोजन एक संतत फलन होता है।

105. त्रिकोणमितीय एवं त्रिकोणमितीय व्युत्क्रम फलन अपने-अपने प्राँतों में अवकलनीय होते हैं।

106. यदि $f . g$ बिंदु $x = a$ पर संतत है, तो f और g बिंदु $x = a$ पर पृथक-पृथक रूप से संतत होते हैं।